第11講　2次関数(3)

方程式の実数解とグラフ

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸（直線 $y=0$）との共有点の x 座標であるから，$y=ax^2+bx+c$ のグラフを調べることで，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数や，実数解の範囲などがわかる．

その際，

・x^2 の係数 a の符号

・放物線の頂点の y 座標の符号（または2次方程式の判別式の符号）

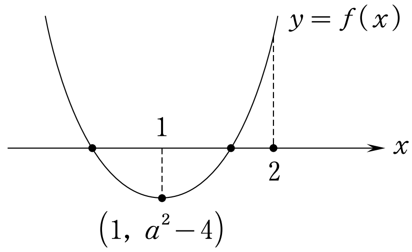
・x の区間の端点における y 座標の符号

・放物線の軸の位置

などに着目するとよい．

例　a を実数の定数とする．2次方程式 $x^2-2x+a^2-3=0$ が $x<2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

解　$f(x)=x^2-2x+a^2-3$ とおく．



$f(x)=0$ が $x<2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつのは，$y=f(x)$ のグラフが右図のようになるときである．

$f(x)=(x-1)^2+a^2-4$

より，求める条件は，

$$\begin{cases} a^2-4<0 & \text{(放物線の頂点の } y \text{ 座標の符号について),} \\ f(2)>0 & \text{(} x \text{ の区間の端点における } y \text{ 座標の符号について)} \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} (a+2)(a-2)<0, \\ a^2-3>0 \end{cases}$$

したがって，求める a の値の範囲は，

$$-2<a<-\sqrt{3},\quad \sqrt{3}<a<2$$

問 aを実数の定数とする．2次方程式 $x^2+2x+a^2-1=0$ が $x>-2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

練習

11・1 a を実数の定数とする．x の2次方程式

$$x^2-2ax+(a-1)^2=0 \qquad \cdots(*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) 方程式(*)が1より大きな解と1より小さな解を1つずつもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式(*)が $0<x<1$ の範囲に2つの解（重解を含む）をもつような a の値の範囲を求めよ．

11・2 a を実数の定数とする．x の方程式

$$x^4-2ax^2-a+6=0$$

が相異なる4つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

11・3　a を実数の定数とする．x の方程式

$$2x^2-4ax+3a^2-6=0$$

が $x>1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ．

発展 11

a を実数の定数とする．x の方程式

$$\left(x^2-2x\right)^2-a\left(x^2-2x\right)+a^2+2a=0$$

が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

復習

11・1　2次関数 $y=2x^2-mx-m+1$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる2点で交わるような実数 m の値の範囲を求めよ．

11・2　a を実数の定数とする．2次方程式 $x^2+2ax+5a^2-4=0$ が $x<2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．