例題 7・5 **仮定が 2 つ必要な数学的帰納法**

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする．

(1) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ．

(2) a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は整数であることを示せ．

(3) a_{3n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は偶数であることを示せ．

考え方

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおき，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ と簡潔に表す．

(1) 一般に，

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

が成り立つことを利用する．

(2) 数学的帰納法を用いて証明する．

「a_n は整数である」を $P(n)$ とすると，ここでは，次の〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕を示す．

〔Ⅰ〕 $P(1)$，$P(2)$ が成り立つ．

〔Ⅱ〕 $P(k)$，$P(k+1)$ が成り立つと仮定すると $P(k+2)$ も成り立つ．

(3) 一般に，x，y を整数，m を自然数とするとき，次が成り立つ．

「$x-y$ が m の倍数である $\iff$ x を m で割った余りと y を m で割った余りが一致する」

そこで，(1) の結果，および (2) で示したことを用いて，

$$a_{n+3}-a_n \text{ が偶数}$$

であることを示す．

解 答

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$a_n=\alpha^n+\beta^n.$$

このとき，

$$\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1,$$

$$\alpha\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1.$$

(1) $$a_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)$$
$$=1\cdot a_{n+1}-(-1)\cdot a_n$$

より，

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n. \quad \cdots ①$$

☜ $(\alpha+\beta)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)$
$=\alpha^{n+2}+\alpha\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta+\beta^{n+2}$
$=\left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right)+\alpha\beta\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)$
より，
$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$
$=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)$
である．

(2) すべての自然数 n に対して，

$$a_n \text{ は整数} \quad \cdots (*)$$

であることを数学的帰納法により示す．

〔I〕 $n=1, 2$ のとき．

$$a_1=\alpha+\beta=1,$$
$$a_2=\alpha^2+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=1^2-2\cdot(-1)=3$$

より，(*) は成り立つ．

〔II〕 $n=k,\ k+1$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，

$$a_k,\ a_{k+1} \text{ は整数.} \quad \cdots ②$$

① より，

$$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$$

であるから，これと ② より，

$$a_{k+2} \text{ は整数.}$$

よって，$n=k+2$ のときも (*) は成り立つ．

〔I〕,〔II〕より，すべての自然数 n に対して (*) は成り立つ．

(3) ① より，

$$a_3=a_2+a_1=3+1=4.$$

① を繰り返し用いると，

$$a_{n+3}-a_n=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$$
$$=(a_{n+1}+a_n)+a_{n+1}-a_n$$
$$=2a_{n+1}.$$

☜ $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}.$

☜ $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n.$

(2) より，a_{n+1} は整数であるから，

$$a_{n+3}-a_n \text{ は偶数である.}$$

よって，

$$a_{n+3} \text{ と } a_n \text{ の偶奇は一致する.}$$

このことと，a_3 が偶数であることから，すべての自然数 n に対して，a_{3n} は偶数である．

☜
(a_3 を 2 で割った余り)
$=$(a_6 を 2 で割った余り)
$=$(a_9 を 2 で割った余り)
$=\cdots$
$=$(a_{3n} を 2 で割った余り)
$=\cdots$

(注 1)　(1) は，次のようにすることもできる．

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-1$$

より，α，β は 2 次方程式

$$x^2-x-1=0,$$

すなわち，

$$x^2=x+1$$

の 2 解であるから，

$$\begin{cases} \alpha^2=\alpha+1, \\ \beta^2=\beta+1. \end{cases}$$

両辺に，それぞれ α^n，β^n を掛けると，

$$\begin{cases} \alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n, \\ \beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n. \end{cases}$$

辺々を加えると，

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)+\left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

より，

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n. \qquad \cdots ①$$

以上のようにすると，より一般に，一般項が

$$a_n=A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n$$

(A，B，α，β は任意の定数)

で与えられる数列 $\{a_n\}$ が，3 項間漸化式

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

を満たすことも示せる．

(注 2)　(3) は次のように数学的帰納法を用いて示すこともできる．

すべての自然数 n に対して，

$$a_{3n} \text{ は偶数} \qquad \cdots (**)$$

であることを数学的帰納法により示す．

〔I〕 $n=1$ のとき．

$$a_3=4$$

より，(**) は成り立つ．

〔II〕 $n=k$ のとき (**) が成り立つと仮定すると，整数 M を用いて，

$$a_{3k}=2M \qquad \cdots ③$$

と表すことができる．

ここで，① を繰り返し用いると，

$$
\begin{aligned}
a_{3(k+1)} &= a_{3k+3} \\
&= a_{3k+2} + a_{3k+1} \\
&= (a_{3k+1} + a_{3k}) + a_{3k+1} \\
&= 2a_{3k+1} + a_{3k} \\
&= 2a_{3k+1} + 2M \quad (\text{③ より}) \\
&= 2(a_{3k+1} + M).
\end{aligned}
$$

$a_{3k+1}+M$ は整数であるから, $2(a_{3k+1}+M)$ は偶数であり, $n=k+1$ のときも (**) は成り立つ.

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より, すべての自然数 n に対して (**) は成り立つ.

(注 3) 自然数 n に関する条件 $P(n)$ が成り立つことを証明するのに, 次の〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕を示すタイプの数学的帰納法を用いる場合もある.

〔Ⅰ〕 $P(1)$ が成り立つ.

〔Ⅱ〕 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, …, $P(k)$ がすべて成り立つと仮定すると, $P(k+1)$ も成り立つ.