

数学 I A II B 編

例題 3・3

1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがある (異なるカードには、異なる数字が書かれている)。

この中から無作為に 3 枚のカードを取り出し、カードに書かれた 3 つの数字の積を X とする。

- (1) X が偶数となる確率を求めよ。
- (2) X が 10 の倍数となる確率を求めよ。

考え方

- (1) X が偶数となるのは 2 の倍数が書かれたカードを 少なくとも 1 枚 取り出すときであるから、直接求めるよりも余事象を考えるとよい。
- (2) 「10 の倍数」は「2 の倍数かつ 5 の倍数」であるが、5 の倍数のカードは $\boxed{5}$ しかないので、3 枚のうち 1 枚が $\boxed{5}$ で、さらに残りの 2 枚のうち 少なくとも 1 枚 が 2 の倍数のカードであればよい。

解答

- (1) 3 枚のカードの取り出し方は全部で、

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}.$$

このうち、 X が偶数となるのは、3 枚のカードのうち、少なくとも 1 枚が偶数のカードのときである。

ゆえに、余事象である「3 枚のカードがすべて奇数のカードのとき」を考えると、その取り出し方は、

$${}_5C_3 = 10 \text{ (通り)}.$$

よって、求める確率は、

$$1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}.$$

- (2) X が 10 の倍数となるのは、3 枚のカードのうち、1 枚が $\boxed{5}$ であり、残り 2 枚のうち、少なくとも 1 枚が偶数のカードのときである。

$\boxed{5}$ 以外の残りの 2 枚について、「2 枚の取り出し方全体から、2 枚とも奇数のカードを取り出すときを除く」と考えると、 X が 10 の倍数となる取り出し方は、

$$1 \times ({}_8C_2 - {}_4C_2) = 28 - 6 = 22 \text{ (通り)}.$$

よって、求める確率は、

$$\frac{22}{84} = \frac{11}{42}.$$

④ 奇数のカードは

$\boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5}, \boxed{7}, \boxed{9}$

の 5 枚ある。

⑤ $\boxed{5}$ を除いた 8 枚は偶数、奇数のカードが 4 枚ずつある。

別解

(2)は、次のようにしてもよい。

2つの事象 A, B を

A : X が 2 の倍数である,

B : X が 5 の倍数である

とすると、 $P(A \cap B)$ を求めればよい。

そこで、余事象の確率を利用すると、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\}. \end{aligned}$$

ここで、(1)より、

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{84}.$$

また、

\overline{B} : ⑤ が取り出されない、

$\overline{A} \cap \overline{B}$: ②, ④, ⑤, ⑥, ⑧ が取り出されない

であるから、

$$P(\overline{B}) = \frac{{}_8C_3}{84} = \frac{56}{84},$$

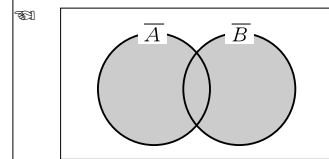
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{{}_4C_3}{84} = \frac{4}{84}.$$

よって、

$$P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{10}{84} + \frac{56}{84} - \frac{4}{84} \right) = \frac{11}{42}.$$

☞ A, B よりも $\overline{A}, \overline{B}$ の方が扱いやすいことに着目する。

☞ ド・モルガンの法則。



練習 ▶▶▶

3・1

袋の中に白球が3個, 赤, 青, 黄の球が1個ずつ, 合計6個の球が入っている. この袋から1個ずつ順に球を計4個取り出して, 4個の球を取り出した順に並べた.

- (1) 白球が2個だけ続いて並ぶ確率を求めよ.
- (2) 白球が2個だけ続いて並んだとき, 両端が同じ色の球である条件つき確率を求めよ.

3・2

数直線上を次の(I), (II)の規則に従って動く点Pがある.

- (I) 最初Pは点0にある.
- (II) 2枚のコインを同時に投げて, 2枚とも表が出たらPは数直線の正の向きに1動き, 2枚とも裏が出たら負の向きに1動く. また, 表と裏が1枚ずつであるときにはPは動かない. これを1回の試行とする.

n を3以上の整数とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) n 回の試行後に, Pが点 $(n-1)$ にある確率を求めよ.
- (2) n 回の試行後に, Pが点 $(n-3)$ にある確率を求めよ.

数学Ⅲ 編

練習 ▶▶▶

5・1 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減, 極値, および曲線 $C: y = f(x)$ の凹凸, 変曲点を調べて, C の概形をかけ. なお, 必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい.

5・2 関数 $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (x + 1)\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (x + 1)\}$ をそれぞれ求めよ.
- (2) $f(x)$ の増減, 極値を調べて, 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ.

第6講 微分法(4)

1 微分法の不等式への応用

例1 $x > 0$ において次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$(1) e^x > x \qquad (2) e^x > \frac{x^2}{2}$$

解 (1) $f(x) = e^x - x$ とおくと,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0)$$

であるから, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加である. したがって,

$$x > 0 \text{ において } f(x) > f(0)$$

また, $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ であるから,

$$x > 0 \text{ において } f(x) > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \text{ において } e^x > x$$

が成り立つ.

(2) $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ とおくと, $g'(x) = e^x - x$ であり, これは(1)の $f(x)$ に等しい.

(1)より, $x > 0$ において $g'(x) > 0$ であるから, $x \geq 0$ において $g(x)$ は単調増加である.

したがって, $x > 0$ において $g(x) > g(0)$ である.

また, $g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ であるから,

$$x > 0 \text{ において } g(x) > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \text{ において } e^x > \frac{x^2}{2}$$

が成り立つ.

問1 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $x > \log(1+x) \quad (x > 0)$

(2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (0 < x < \pi)$