第6講 微分法 (4)

微分法の方程式や不等式への応用について研究します．

1 微分法の不等式への応用

例1　$x>0$ において次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$e^x>x$　　(2)　$e^x>\dfrac{x^2}{2}$

解 (1)　$f(x)=e^x-x$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-1>0 \quad (x>0)$$

であるから，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調増加である．したがって，

$$x>0 \text{ において } f(x)>f(0)$$

また，$f(0)=e^0-0=1>0$ であるから，

$$x>0 \text{ において } f(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \text{ において } e^x>x$$

が成り立つ．

(2)　$g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと，$g'(x)=e^x-x$ であり，これは(1)の $f(x)$ に等しい．

(1)より，$x>0$ において $g'(x)>0$ であるから，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調増加である．

したがって，$x>0$ において $g(x)>g(0)$ である．

また，$g(0)=e^0-0=1>0$ であるから，

$$x>0 \text{ において } g(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \text{ において } e^x>\frac{x^2}{2}$$

が成り立つ．

問1　次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$x>\log(1+x)$　$(x>0)$

(2)　$\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$　$(0<x<\pi)$

練習

5・1　関数 $f(x)=xe^{-x}$ の増減，極値，および曲線 $C: y=f(x)$ の凹凸，変曲点を調べて，C の概形をかけ．なお，必要ならば $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を用いてよい．

5・2　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}$，$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f(x)$ の増減，極値を調べて，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ．