例題 3・3 余事象の利用

1から9までの数字が1つずつ書かれた9枚のカードがある（異なるカードには，異なる数字が書かれている）．

この中から無作為に3枚のカードを取り出し，カードに書かれた3つの数字の積をXとする．

(1) Xが偶数となる確率を求めよ．

(2) Xが10の倍数となる確率を求めよ．

考え方

(1) Xが偶数となるのは2の倍数が書かれたカードを少なくとも1枚取り出すときであるから，直接求めるよりも余事象を考えるとよい．

(2) 「10の倍数」は「2の倍数かつ5の倍数」であるが，5の倍数のカードは$\boxed{5}$しかないので，3枚のうち1枚が$\boxed{5}$で，さらに残りの2枚のうち少なくとも1枚が2の倍数のカードであればよい．

解答

(1) 3枚のカードの取り出し方は全部で，

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84(\text{通り}).$$

このうち，Xが偶数となるのは，3枚のカードのうち，少なくとも1枚が偶数のカードのときである．

ゆえに，余事象である「3枚のカードがすべて奇数のカードのとき」を考えると，その取り出し方は，

$${}_5C_3=10(\text{通り}).$$

☜ 奇数のカードは $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ の5枚ある．

よって，求める確率は，

$$1-\frac{10}{84}=\frac{37}{42}.$$

(2) Xが10の倍数となるのは，3枚のカードのうち，1枚が$\boxed{5}$であり，残り2枚のうち，少なくとも1枚が偶数のカードのときである．

$\boxed{5}$以外の残りの2枚について，「2枚の取り出し方全体から，2枚とも奇数のカードを取り出すときを除く」と考えると，Xが10の倍数となる取り出し方は，

$$1\times({}_8C_2-{}_4C_2)=28-6=22(\text{通り}).$$

☜ $\boxed{5}$を除いた8枚は偶数，奇数のカードが4枚ずつある．

よって，求める確率は，

$$\frac{22}{84}=\frac{11}{42}.$$

別解

(2) は，次のようにしてもよい．

2 つの事象 A，B を

A：X が 2 の倍数である，

B：X が 5 の倍数である

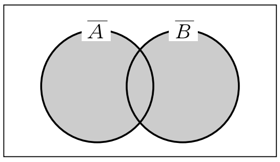
とすると，$P(A\cap B)$ を求めればよい．

そこで，余事象の確率を利用すると，

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B)&=1-P\left(\overline{A\cap B}\right)\\
&=1-P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\
&=1-\left\{P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

☜ A，B よりも $\overline{A}$，$\overline{B}$ の方が扱いやすいことに着目する．

☜ ド・モルガンの法則．

☜ 

ここで，(1) より，

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{10}{84}.$$

また，

$\overline{B}$：$\boxed{5}$ が取り出されない，

$\overline{A}\cap\overline{B}$：$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$ が取り出されない

であるから，

$$P\left(\overline{B}\right)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{84}=\frac{56}{84},$$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{84}=\frac{4}{84}.$$

よって，

$$P(A\cap B)=1-\left(\frac{10}{84}+\frac{56}{84}-\frac{4}{84}\right)=\frac{11}{42}.$$

練習

3・1

袋の中に白球が 3 個，赤，青，黄の球が 1 個ずつ，合計 6 個の球が入っている．この袋から 1 個ずつ順に球を計 4 個取り出して，4 個の球を取り出した順に一列に並べる．

(1) 白球が 2 個だけ続いて並ぶ確率を求めよ．

(2) 白球が 2 個だけ続いて並んだとき，両端が同じ色の球である条件つき確率を求めよ．

3・2

数直線上を次の (I), (II) の規則に従って動く点 P がある．

(I) 最初 P は点 0 にある．

(II) 2 枚のコインを同時に投げて，2 枚とも表が出たら P は数直線の正の向きに 1 動き，2 枚とも裏が出たら負の向きに 1 動く．また，表と裏が 1 枚ずつであるときには P は動かない．これを 1 回の試行とする．

n を 3 以上の整数とするとき，次の問に答えよ．

(1) n 回の試行後に，P が点 $(n-1)$ にある確率を求めよ．

(2) n 回の試行後に，P が点 $(n-3)$ にある確率を求めよ．