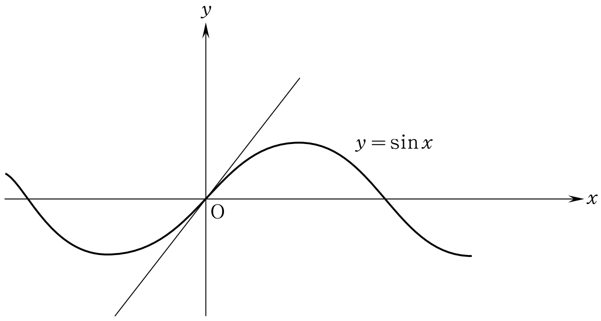
第10講　微分法　(1)

基本事項

Theme　三角関数，指数関数の極限，グラフの概形の問題について研究します．

❶ 三角関数の極限の導入

$y=\sin x$ のグラフにおいて，$x=0$ すなわち，原点における接線の傾きはどうなるかを考えてみよう．



$f(x)=\sin x$ とおくと，それは数学Ⅱで学んだように，

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

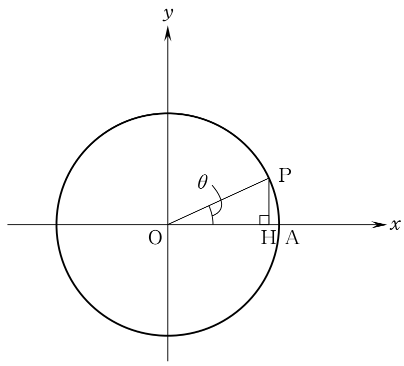
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

となる．したがって，極限 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ の値を求める必要がある．

いま，h を θ と書き直して，θ と $\sin\theta$ の値を三角関数の数表などを用いて求めると次のようになる．

θ						
θ	度数法	10°	5°	3°	2°	1°
	弧度法	0.17453	0.08727	0.05236	0.03491	0.01745
$\sin\theta$		0.17365	0.08716	0.05234	0.03490	0.01745

この表から，θ を弧度法（ラジアン）で測ったならば，$\theta\longrightarrow 0$ のとき $\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow 1$ となることが推測できる．



(注)　微分・積分では**角は必ず弧度法を用いて測ることに注意しよう**．その単位の radian はラテン語の半径 (radius) に由来している．

また，単位円 $x^2+y^2=1$ において，A(1, 0), P$(\cos\theta, \sin\theta)$ から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると，θ が十分小さい正の値のときは，

$$\mathrm{PH}=\sin\theta,\quad \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta$$

だから，「$\theta\longrightarrow 0$ のとき $\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow 1$」は，「P⟶A のとき

$\dfrac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}} \longrightarrow 1$」, つまり「$\theta \doteqdot 0$ ならば $\mathrm{PH} \doteqdot \overset{\frown}{\mathrm{AP}}$」を意味する.

❷ 三角関数の極限

例　題 10・1

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, 不等式

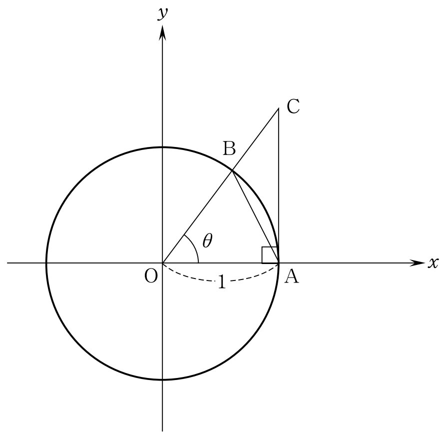
$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

が成り立つことを示せ.

(2)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

が成り立つことを示せ.

【解答】



(1) 右の図において, 面積を比べると,

$$\triangle\mathrm{OAB}< \text{扇形}\ \mathrm{OAB}<\triangle\mathrm{OAC}$$

すなわち,

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta.$$

よって,

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta. \qquad \cdots①$$

(2) $\dfrac{\sin(-\theta)}{(-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ であるから, $\theta>0$ で $\theta\longrightarrow 0$ の場合のみを考えればよい.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta>0$ だから, ① を $\sin\theta$ で割って,

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}.$$

さらに, 逆数をとって,

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1.$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ だから, はさみうちの原理より

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

(注) $f(x)=\sin x$ に対して $f'(0)=1$, つまり $f(x)=\sin x$ の原点での接線は $y=x$ である.
角を度数法で測ると $f'(0)=1$ とはならない. したがって, 微積分においては弧度法を用いる.

例　題 10・2

次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\theta}$

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

(解説)

$\theta\longrightarrow 0$ のとき $\sin 3\theta\longrightarrow 0$ であるが，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow 1$ と同じく $\dfrac{\sin 3\theta}{\theta}\longrightarrow 1$ になるわけではない．重要なことは，$\dfrac{\sin\square}{\square}$ において，2 つの□を同じものにすることである．

【解答】

(1)
$$\frac{\sin 3\theta}{\theta}=\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times 3.$$

よって，$\theta'=3\theta$ とおくと，$\theta\longrightarrow 0$ のとき $\theta'\longrightarrow 0$ だから，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\theta}=\lim_{\theta'\to 0}\frac{\sin\theta'}{\theta'}\times 3=1\times 3=3.$$ …(答)

(2)　半角の公式により $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ だから，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$ …(答)

((2) の別解)

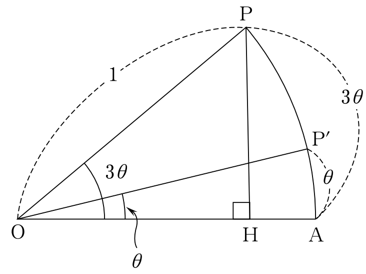
分母，分子に $1+\cos\theta$ を掛けて，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$ …(答)

(注) (1) は図解すると次のようになる．

$$\frac{\sin 3\theta}{\theta}=\frac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{P'A}}}$$

$$=\frac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}}\times 3 \longrightarrow 1\times 3.$$



入試問題を解くうえで，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$ は

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ と同じくらい用いる頻度が高く重要である．

［三角関数の極限］

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

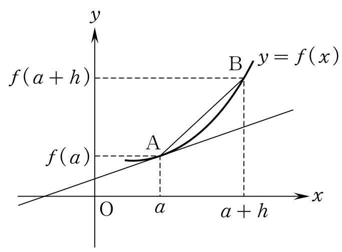
(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$

❸ 微分係数の定義

関数 $f(x)$ の定義域に属する点 $x=a$ において，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**という．また，この極限値を $x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といい **$f'(a)$** で表す．

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\quad (\text{ただし，}x=a+h)$$



点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{B}(a+h,\ f(a+h))$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\quad(\text{平均変化率})$$

で与えられるから，$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを与える．

上の定義は詳しくかけば，次のようになる．

「$f(x)$ が $x=a$ で微分可能」

$\Longleftrightarrow$ **「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定値として存在する」**

$\Longleftrightarrow$「$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$（右側微分係数）と $\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$（左側微分係数）が

それぞれ有限確定値として存在し，この 2 つの値が一致する」．

自習問題 10

[10・1]

O を原点とする座標平面上に 2 点 A(2, 0), B(0, 1) がある．自然数 n に対し，線分 AB を 1 : n に内分する点を P_n とし，$\angle \mathrm{AOP}_n = \theta_n$ とする．ただし，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ である．

線分 AP_n の長さを l_n として，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\theta_n}$ を求めよ．

[10・2]

曲線 $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ 上で，$x = \alpha\ (\neq 0)$ なる点 P における法線が y 軸と交わる点を Q とする．$\alpha \longrightarrow 0$ のとき，点 Q はどんな点に近づくか，その y 座標を求めよ．

[10・3]

曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)\ (t > 0)$ における法線を l とする．ただし，$\log x$ は自然対数である．

(1) 点 $\mathrm{P}'(s,\ \log s)\ (s > 0,\ s \neq t)$ における法線を l' とし，l と l' の交点を Q′ とする．s が t に近づくとき，Q′ の近づく点 Q の座標を求めよ．

(2) PQ の値が最小となるような t の値 t_0 を求めよ．

[10・4]

半径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さを l_n，外接する正 n 角形の周の長さを L_n とするとき，

$$l_n + L_n > l_{n+1} + L_{n+1}$$

を示せ．

自習問題 10

[10・5]

曲線 $y=\dfrac{x}{\log x}$ の増減，凹凸，変曲点を調べ，曲線の概形をかけ．さらに，変曲点における接線を図にかき込め．

[10・6]

$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$ とする．

(1) 方程式 $x=f(x)$ はただ1つの実数解をもつことを証明せよ．

(2) 任意の実数 u，v に対して，

$$|f(u)-f(v)|\leqq\frac{1}{2}|u-v|$$

が成り立つことを証明せよ．

(3)
$$a_1=0,\quad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ は，方程式 $x=f(x)$ の実数解 α に収束することを，(2)を利用して証明せよ．