第2講 関数

予習問題A

2・1

奇関数 $f(x)$ と偶関数 $g(x)$ について，次の各命題の真偽を調べよ．

(1) $f(x)+g(x)$ は奇関数である．

(2) $f(x)g(x)$ は奇関数である．

2・2

$f(x)=\log x$，$g(x)=e^{-x}+1$，$h(x)=f(g(x))$ とし，関数 $y=h(x)$ の逆関数を $y=i(x)$ とするとき，$i(x)$ を x で表せ．

2・3

実数を係数とする x の整式 $f(x)$ について，次の条件 p，q が同値であることを示せ．ただし，α は実数の定数とする．

p：$f(x)$ が2次式 $(x-\alpha)^2$ で割り切れる

q：関数 $y=f(x)$ のグラフが点 $(\alpha,\ 0)$ において x 軸に接する

2・4

実数 x，y が $x^2+y^2=3$ を満たしながら変化するとき，$x^3+y^3-3x-3y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

2・5

実数 x，y，z が $x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=3$，$x<y\leqq z$ を満たしながら変化するとき，z のとり得る値の範囲を求めよ．

2・6

実数 a が $0<a<1$ の範囲を変化するとき，x の2次方程式 $x^2-ax+a^2-1=0$ の実数解がとり得る値の範囲を求めよ．

2・1

(1)　偽である．

なぜならば，例えば，

$$f(x)=x\ (\text{奇関数}),\quad g(x)=x^2\ (\text{偶関数})$$

としたとき，$f(x)+g(x)=x+x^2$ について，

$$f(-x)+g(-x)=-x+x^2$$

であり，$f(-x)+g(-x)=-\{f(x)+g(x)\}$ が恒等的には成り立たないからである．

(2)　真である．

なぜならば，奇関数 $f(x)$ と偶関数 $g(x)$ に対して，

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

が恒等的に成り立つことから，

$$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$$

も恒等的に成り立つからである．

2・2

変数 s と t の間に $t=i(s)$ の関係があるとき，

$$\begin{aligned}s&=h(t)\ (\text{関数 } i(x) \text{ の定義より})\\&=f(g(t))\\&=\log g(t)\\&=\log\left(e^{-t}+1\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．

これを t について解くと，

$$e^{-t}+1=e^s.$$

$$e^{-t}=e^s-1.$$

$$-t=\log\left(e^s-1\right).$$

$$t=-\log\left(e^s-1\right).$$

よって，$i(s)=-\log\left(e^s-1\right)$ であり，

$$i(x)=-\log\left(e^x-1\right).$$

2・3

「$p \Longrightarrow q$」と「$q \Longrightarrow p$」を示せばよい．

($p \Longrightarrow q$ の証明)

p が成り立つとき，整式 $Q(x)$ を用いて，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

と表せる．このとき，両辺を微分して，

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$$

であり，2つの式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$f(\alpha)=0 \text{ かつ } f'(\alpha)=0$$

が成り立つから，関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(\alpha,\ 0)$ において x 軸に接する，つまり q が成り立つ．

($q \Longrightarrow p$ の証明)

q が成り立つとき，

$$f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)=0. \qquad \cdots①$$

$f(x)$ は整式 $Q(x)$ と定数 a, b を用いて，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+a(x-\alpha)+b$$

と表せる．このとき両辺を微分して，

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a.$$

① より，$b=0$ かつ $a=0$ となり，

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

と表せるから，p が成り立つ．

2・4

$x^2+y^2=3$ を満たしながら変化する実数 x, y は，

$$x=\sqrt{3}\cos\theta,\quad y=\sqrt{3}\sin\theta$$

と表せる．θ はすべての実数値をとって変化する．

このとき，

$$\begin{aligned}&x^3+y^3-3x-3y\\&=3\sqrt{3}\cos^3\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta-3\sqrt{3}\cos\theta-3\sqrt{3}\sin\theta\\&=3\sqrt{3}\left\{(\cos\theta+\sin\theta)^3-3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)\right\}\\&\qquad\qquad-3\sqrt{3}(\cos\theta+\sin\theta).\end{aligned}$$

ここで，$\cos\theta+\sin\theta=t$ とおくと，

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より t は $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲を変化し，

$$\begin{aligned}\cos\theta\sin\theta&=\frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+\sin\theta)^2-\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}x^3+y^3-3x-3y&=3\sqrt{3}\left\{t^3-3\cdot\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)t\right\}-3\sqrt{3}\,t\\&=-\frac{3\sqrt{3}}{2}t^3+\frac{3\sqrt{3}}{2}t.\end{aligned}$$

これより，

$f(t)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t^3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t\ \left(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$ の値域を求めればよい．

$$\begin{aligned}f'(t)&=-\frac{9\sqrt{3}}{2}t^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

予習問題B　2・2

関数 $f(x)$ について，次の条件(*)を満たす 0 でない定数 p が存在するとき，$f(x)$ を周期関数といい，p を $f(x)$ の周期という．

(*)：「任意の実数 x に対して $f(x+p)=f(x)$ が成り立つ」

とくに，周期のうち正で最小のものを基本周期という．

関数 $f(x)=\sin 5x+\cos 2x$ の基本周期を求めよ．

【解答】

$f(x)=\sin 5x+\cos 2x$ の周期 p は次の条件(*)を満たす．

(*)：「任意の実数 x に対して $f(x+p)=f(x)$ が成り立つ」

(*)の成立には，$x=0,\ \pi$ での成立が必要であるから，

$$f(p)=f(0)\quad かつ\quad f(\pi+p)=f(\pi)$$

すなわち，

$$\sin 5p+\cos 2p=1\quad かつ\quad -\sin 5p+\cos 2p=1.$$

これより，

$$\sin 5p=0\quad かつ\quad \cos 2p=1$$

であり，p の値は，

$$5p=\pi\times(整数)\quad かつ\quad 2p=2\pi\times(整数)$$

すなわち，

$$p=\pi\times k\ (k は整数)$$

に限られる．

これらの p のうち，(*)を満たす正で最小の値が求めるものである．

$p=\pi$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x+p)&=\sin 5(x+\pi)+\cos 2(x+\pi)\\ &=-\sin 5x+\cos 2x \end{aligned}$$

より，例えば $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$$f(x+p)=f\left(\frac{\pi}{4}+p\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，(*)は成り立たない．

☜ $l,\ m$ を整数として

$$\begin{cases} 5p=\pi l & \cdots ① \\ 2p=2\pi m & \cdots ② \end{cases}$$

と表せる．

② より $p=\pi m$ であり，

$$p=\pi\times k\ (k は整数)$$

と表せることが必要．

このとき，$5p=\pi\times 5k$ であり，$l=5k$ とすれば ① が成り立つ．

$p=2\pi$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x+p) &= \sin 5(x+2\pi)+\cos 2(x+2\pi) \\ &= \sin 5x+\cos 2x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

であるから，(*) は成り立つ．

以上より，$f(x)$ の基本周期は 2π．

(注)

等式 $f(x+p)=f(x)$ の x に具体的な値を代入することで，未知定数 p が満たすべき必要条件が得られる．

p の値を特定するためには，本来 p についての等式を 1 つ作ればよいのだが，例えば $x=0$ を代入して得られる p の方程式

$$\sin 5p+\cos 2p=1$$

を解くのは容易ではない．

そこで **【解答】** では，$x=0$, π の 2 つの値を代入し，敢えて一旦 $\sin 5p$ と $\cos 2p$ の連立方程式と見て解くことにより，比較的単純な計算によって p の値を絞り込んでいる．

実戦問題

2・1

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする．$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

（2004　京都大・理系・前期）

2・2

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとり得る値の範囲を求めよ．

（2012　京都大・文理共通）

2・3

α, β, γ は $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

（1999　京都大・理系・後期）