第6講 微分法(2)

1 三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

〈$(\sin x)' = \cos x$ の証明〉

$f(x) = \sin x$ とおくと,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \longleftarrow \left(\begin{array}{l}(\text{和}) \longrightarrow (\text{積})\text{の変換} \\ \sin A - \sin B \\ = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x.$$

よって,

$$f'(x) = \cos x.$$

例 1　$y = \cos 3x$ のとき,

$$y' = -\sin 3x \cdot (3x)' = -3\sin 3x.$$

$y = \sin^2 x$ のとき,

$$y' = \left\{(\sin x)^2\right\}' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

問 1　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = \sin 4x$　　　(2)　$y = \cos^3 x$

2 関数の最大・最小

例2 関数 $f(x)=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$ の $0<x<\pi$ における最小値を求めてみよう．

$$f'(x)=\frac{(2-\cos x)'\sin x-(2-\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cdot\sin x-(2-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}.$$

したがって，$0<x<\pi$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

よって，$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $f(x)$ は最小になり，最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

問2 関数 $f(x)=x-2\sin x$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における最大値，最小値を求めよ．

練習

6・1 次の関数 $f(x)$ を微分せよ.

(1) $f(x)=x\sin 3x$

(2) $f(x)=\cos^3 2x$

6・2 $f(x)=x(\cos x+\sin x)+\cos x-\sin x$ とする.

$y=f(x)$ のグラフの概形を $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲でかけ.

6・3 線分 AB を直径とする半円周上(2 点 A, B を除く)に点 P をとり, P から線分 AB に下ろした垂線の足を H とする. また, 線分 AB の中点を O とし, OA$=1$, $\angle \mathrm{AOP}=\theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 三角形 OPH の周の長さ l の最大値を求めよ.

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 三角形 BPH の面積 S の最大値を求めよ.