# 第7講 図形と方程式

## 基本問題

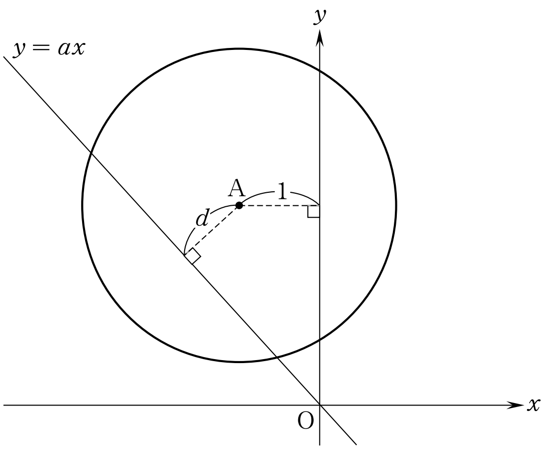
**7・1** 円 $C: x^2+y^2+2x-6y+2=0$ とする．$C$ が $y$ 軸から切り取る線分の長さと $C$ が直線 $y=ax$ から切り取る線分の長さが等しいとき，定数 $a$ の値を求めよ．

**7・2** 2つの円 $C_1: (x+1)^2+(y-2)^2=1$，$C_2: (x-7)^2+(y-6)^2=1$ に外接し，$x$ 軸に接する円の中心の $x$ 座標を求めよ．

**基本問題 7・1**

円 $C: x^2+y^2+2x-6y+2=0$ とする．$C$ が $y$ 軸から切り取る線分の長さと $C$ が直線 $y=ax$ から切り取る線分の長さが等しいとき，定数 $a$ の値を求めよ．

**解 答**




$$(x+1)^2+(y-3)^2=8$$

より，$C$ の中心は $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，半径は $2\sqrt{2}$ である．

$C$ が $y$ 軸から切り取る線分の長さと $C$ が直線 $y=ax$ から切り取る線分の長さが等しくなるのは，「A から $y$ 軸までの距離」と「A から直線 $y=ax$ までの距離」が等しいときであるから，A と直線 $ax-y=0$ との距離を $d$ とすると，

$$d=1.$$

よって，

$$\frac{|-a-3|}{\sqrt{a^2+1}}=1.$$

$$(a+3)^2=a^2+1.$$

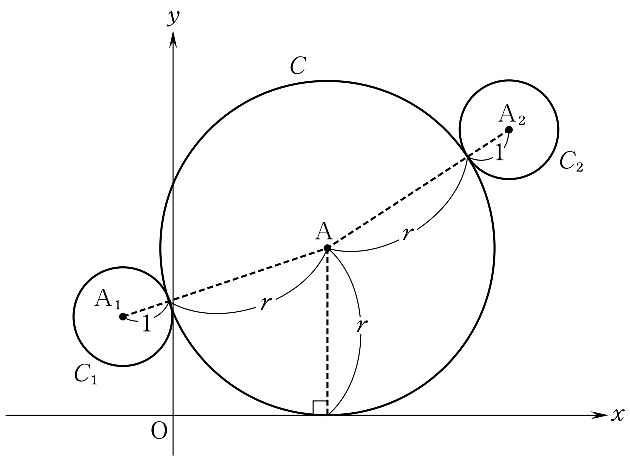
$$6a=-8.$$

$$a=-\frac{4}{3}. \qquad \cdots(答)$$

**基本問題 7・2**

2 つの円 $C_1$: $(x+1)^2+(y-2)^2=1$, $C_2$: $(x-7)^2+(y-6)^2=1$ に外接し，$x$ 軸に接する円の中心の $x$ 座標を求めよ．

**解 答**




$C_1$ の中心は $A_1(-1,\ 2)$，半径は $r_1=1$．

$C_2$ の中心は $A_2(7,\ 6)$，　半径は $r_2=1$．

求める円を $C$ とし，$C$ の半径を $r$ とおく．

条件から，$C$ は $y \geqq 0$ にあり，$x$ 軸に接するので，中心の座標は $A(t,\ r)$ と表せる．

$C$ が $C_1$, $C_2$ と外接する条件は，

$$\begin{cases} AA_1=r+r_1 \\ AA_2=r+r_2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (t+1)^2+(r-2)^2=(r+1)^2 \\ (t-7)^2+(r-6)^2=(r+1)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2+2t+4=6r, & \cdots ① \\ t^2-14t+84=14r. & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より $r$ を消去すると，

$$4t^2+56t-224=0.$$

$$t^2+14t-56=0.$$

$$t=-7\pm\sqrt{105}.$$

よって，$C$ の $x$ 座標は，

$$-7\pm\sqrt{105}. \qquad \cdots(答)$$

（このとき ① より，$r=(t+1)^2+3=\left(-6\pm\sqrt{105}\right)^2+3>0$ となり，$r$ は存在する．）

## 練習

**7・1** 座標平面上に円 $C: x^2+y^2=2$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 4)$ がある.

⑴ A を通る直線のうち, $C$ によって切り取られる線分の長さが 2 となる直線の方程式を求めよ.

⑵ A を通り $C$ に接する 2 本の直線の方程式を求めよ.

⑶ A から $C$ に引いた 2 本の接線と $C$ のいずれにも接する円のうち, $C$ より半径が小さい円 $D$ の半径を求めよ.

**7・2** $m$ を正の実数とする. $xy$ 平面上の点 $\mathrm{A}(6,\ 0)$ から直線 $l: y=mx$ へ下ろした垂線の足を $\mathrm{A}'$ とし, $x$ 軸に関して $\mathrm{A}'$ と対称な点を P とする. また, 点 $\mathrm{B}(0,\ 3)$ から $l$ へ下ろした垂線の足を $\mathrm{B}'$ とし, $y$ 軸に関して $\mathrm{B}'$ と対称な点を Q とする. さらに, 線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする.

⑴ P, Q の座標をそれぞれ求めよ.

⑵ R の座標を求めよ.

⑶ $m$ がすべての正の実数を変化するとき, R の軌跡を求め, 図示せよ.