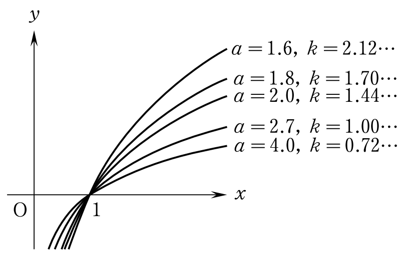
## 4　指数関数・対数関数の極限

### A　自然対数

$y=\log_a x$ のグラフは必ず点 $(1,\ 0)$ を通り，この点における接線の傾き $k$ は，右の図のように $a$ の値によって様々な値をとる．$k$ の値は $y=\log_a x$ の $x=1$ における微分係数であるから，これを定義に従って求めると，




$$k=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)-\log_a 1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は収束することが知られており，その極限値を $e$ と書く．

$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e}$$

$e$ は無理数で，$e=2.718281828459045\cdots$ であることが知られている．$2.7<e<2.8$ であることは覚えておいた方がよい．

$e$ を底とする対数を**自然対数**という．$x$ の自然対数 $\log_e x$ は，$e$ を省略して $\log x$ と書くことが多いので，今後 $\log x$ と書けば，自然対数を表すものとする．先ほどの計算からわかるように，自然対数のグラフは，点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きがちょうど $1$ となる．

### B　指数関数・対数関数の重要な極限

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

(1)〜(4) は互いに同値である．

## 練 習

**8・1** 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ について，次の問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $y=f(x)$ の増減，極値を調べて，グラフの概形をかけ．